LICZBY RZECZYWISTE, WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE, RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI, UKŁADY RÓWNAŃ

Zadanie 1. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia $2024 : \left(1 - \frac{1}{2025}\right) - \left(1 - \frac{2025}{2024}\right) : \frac{1}{2024}$ jest równa

A. 0 **B.** 1 **C.** 2024 **D.** 2026

Zadanie 2. (0–2)

Pensja pana X jest o 50% wyższa od średniej krajowej, a pensja pana Y jest o 40% niższa od średniej krajowej.

Dokończ zdania. Zaznacz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H.

1. Pensja pana X jest wyższa od pensji pana Y

A. o 40% pensji pana Y.
B. o 90% pensji pana Y.
C. o 150% pensji pana Y.
D. o 275% pensji pana Y.

2. Pensja pana Y jest niższa od pensji pana X

E. o 60% pensji pana X.
F. o 73% pensji pana X.
G. o 90% pensji pana X.
H. o 150% pensji pana X.

Zadanie 3. (0–2)

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $(3n+5)^2 + 11n^2 - 18$ przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2.

Zadanie 4. (0–3)

Rozważmy dwie kolejne liczby naturalne a i b takie, że $a < b$ oraz obie są niepodzielne przez 3.

Udowodnij, że liczba $a^2 + 11ab + b^2$ jest podzielna przez 9.

Zadanie 5. (0–2)

Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ liczba $n(n^2 + 3n + 2)$ jest podzielna przez 6.

Zadanie 6. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\frac{\sqrt[3]{250} + \sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{54}}$ jest równa

A. $\sqrt[3]{\frac{76}{49}}$ **B.** (-1) **C.** 4 **D.** $4\sqrt[3]{2}$

Zadanie 7. (0–2)

Udowodnij, że liczba $3^{45} + 9^{22} + 27^{14}$ jest podzielna przez 37.

Zadanie 8. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $|\sqrt{5} - 1| - 3|2 - \sqrt{5}|$ jest równa

A. (-7)

B. $5 - 4\sqrt{5}$

C. $4\sqrt{5} - 7$

D. $5 - 2\sqrt{5}$

Zadanie 9. (0–1)

Oprocentowanie na długoterminowej lokacie w pewnym banku wynosi 3% w skali roku (już po uwzględnieniu podatków). Po każdym roku oszczędzania są doliczane odsetki od aktualnego kapitału znajdującego się na lokacie – zgodnie z procentem składanym.

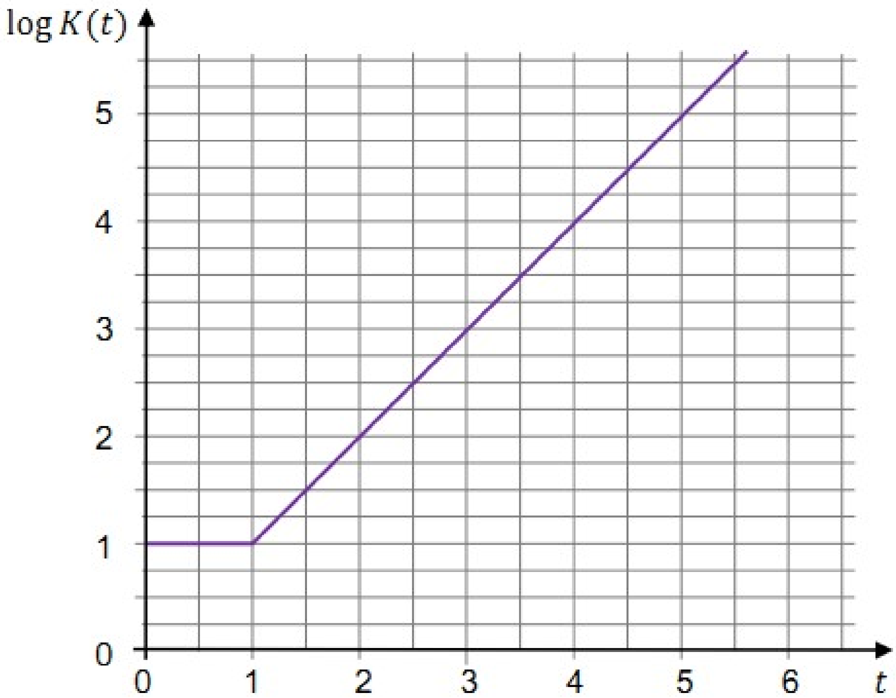
Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Po 10 latach oszczędzania w tym banku (i bez wypłacania kapitału ani odsetek w tym okresie) kwota na lokacie będzie większa od kwoty wpłaconej na samym początku o (w zaokrągleniu do 1%)

A. 30% **B.** 34% **C.** 36% **D.** 43%

Zadanie 10. (0–1)

Na wykresie przedstawiono zależność $\log K(t)$, gdzie $K(t)$ jest liczbą bakterii w próbce po czasie t wyrażonym w godzinach, jaki upłynął od chwili $t = 0$ rozpoczęcia obserwacji.



Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Gdy upłynęły dokładnie trzy godziny od chwili $t = 0$, liczba K bakterii była równa

A. 3 **B.** 100 **C.** 1000 **D.** 10000

Zadanie 11. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\log_2\left[\left(\sqrt{2}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^4 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^8\right]$ jest równa

A. $\sqrt{2}$ **B.** 7 **C.** 14 **D.** 2^7

Zadanie 12. (0–1)

Dane są liczby $a = \log_2\left(3\sqrt{5} + \sqrt{13}\right)$ oraz $b = \log_2\left(3\sqrt{5} - \sqrt{13}\right)$.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $a + b$ jest równa

A. $\log_2 45$ **B.** $\log_2 30$ **C.** 4 **D.** 5

Zadanie 13. (0–2)

Dane są dwie liczby x i y, takie że iloraz $\frac{x}{y}$ jest równy $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{x+y}{x}$.

Wynik podaj w postaci $\frac{a+\sqrt{b}}{c}$, gdzie a, b, c są liczbami całkowitymi dodatnimi.

Zadanie 14. (0–2)

Dane są liczby $a = \sqrt{5} - 2$ oraz $b = \sqrt{5} + 2$.

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{a \cdot b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} : \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$ dla podanych a i b.

Zadanie 15. (0–2)

Dana jest liczba $x = a - \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2$, gdzie a należy do zbioru liczb rzeczywistych.
W rozwiązaniu zadania uwzględnij fakt, że liczby $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ oraz $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ są niewymierne.

Dokończ zdanie. Zaznacz <u>dwie</u> odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich dokończenie zdania było prawdziwe.

Liczba x jest wymierna dla

A. $a = 5$

B. $a = \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^2 + 0{,}3$

C. $a = 6$

D. $a = -2\sqrt{6} + 12{,}5$

E. $a = \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{6}$

F. $a = -\sqrt{6}$

Zadanie 16. (0–1)

Dane jest wyrażenie $W(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 4} \cdot \frac{x-2}{x}$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Wartość wyrażenia $W(x)$ jest określona dla każdej liczby rzeczywistej x.	**P**	**F**
2.	Jeżeli wartość wyrażenia $W(x)$ jest określona, to $W(x) = \frac{2x}{x+2}$.	**P**	**F**

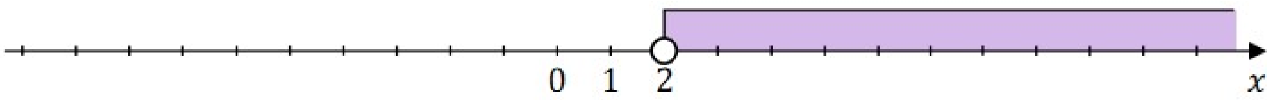
Zadanie 17. (0–1)

Dana jest nierówność

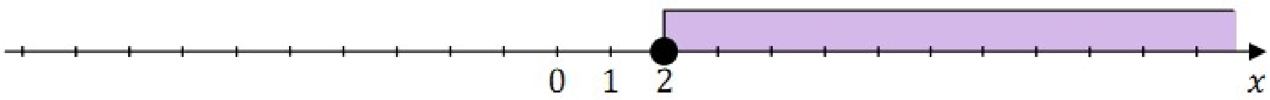
$$\frac{2x-1}{2}-\frac{x+2}{3}\geq\frac{1}{6}$$

Na którym rysunku poprawnie zaznaczono na osi liczbowej zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających powyższą nierówność? Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

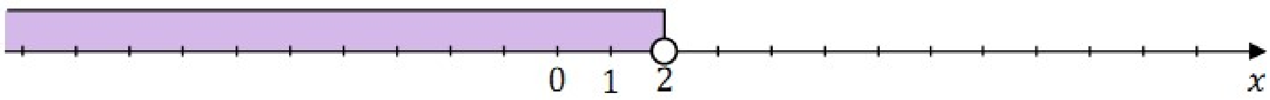
A.



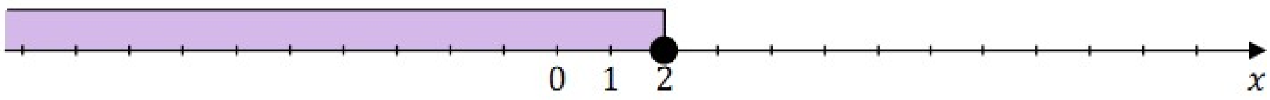
B.



C.



D.



Zadanie 18. (0–3)

Dane jest równanie

$$\frac{2}{2x+1}=\frac{x-1}{x+2}$$

Wyznacz dziedzinę tego równania. Rozwiąż to równanie.

Zadanie 19. (0–2)

Rozwiąż nierówność

$$(\mathbf{3}\boldsymbol{x}-\mathbf{4})(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})<\boldsymbol{x}$$

Zadanie 20. (0–3)

Rozważmy takie liczby rzeczywiste a i b, które spełniają warunki:

$$a\neq 0,\ b\neq 0 \quad \text{oraz} \quad a^3+b^3=(a+b)(a^2+3ab+b^2).$$

Oblicz wartość liczbową wyrażenia $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$ dla dowolnych liczb rzeczywistych $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$, spełniających powyższe warunki.

Zadanie 21. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Układ równań $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -4x - 8y = -4 \end{cases}$

A. nie ma rozwiązań.

B. ma dokładnie jedno rozwiązanie.

C. ma dokładnie dwa rozwiązania.

D. ma nieskończenie wiele rozwiązań.

FUNKCJE, CIĄGI, OPTYMALIZACJA

Zadanie 22. (0–2)

Funkcja $y = f(x)$ jest określona za pomocą tabeli

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-3	2	0	1	0	2	1

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Zaznacz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Funkcja f ma dokładnie jedno miejsce zerowe.	**P**	**F**
W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) wykres funkcji f jest symetryczny względem osi Oy.	**P**	**F**
Największa wartość funkcji f jest równa 3.	**P**	**F**

Zadanie 23. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) wykresy funkcji liniowych $f(x) = (2m + 7)x + 5$ oraz $g(x) = 3x$ <u>nie mają</u> punktów wspólnych dla

A. $m = -2$ **B.** $m = -1$ **C.** $m = 1$ **D.** $m = 2$

Zadanie 24. (0–1)

Dana jest funkcja f określona wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 6 & \text{dla } x \le 2 \\ x - 4 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$$

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miejscem zerowym funkcji f jest liczba

A. (-6) **B.** (-4) **C.** 3 **D.** 4

Zadanie 25. (0–1)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = x^2 - b - 2\sqrt{2}$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Miejscem zerowym funkcji f jest $x = \sqrt{2} + 1$.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Współczynnik b we wzorze funkcji f jest równy

A. (-3) **B.** 3 **C.** $3 - \sqrt{2}$ **D.** $3 - 2\sqrt{2}$

Zadanie 26. (0–1)

Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = 3x^2 + 2x + m$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Współczynnik m jest liczbą rzeczywistą mniejszą od zera.

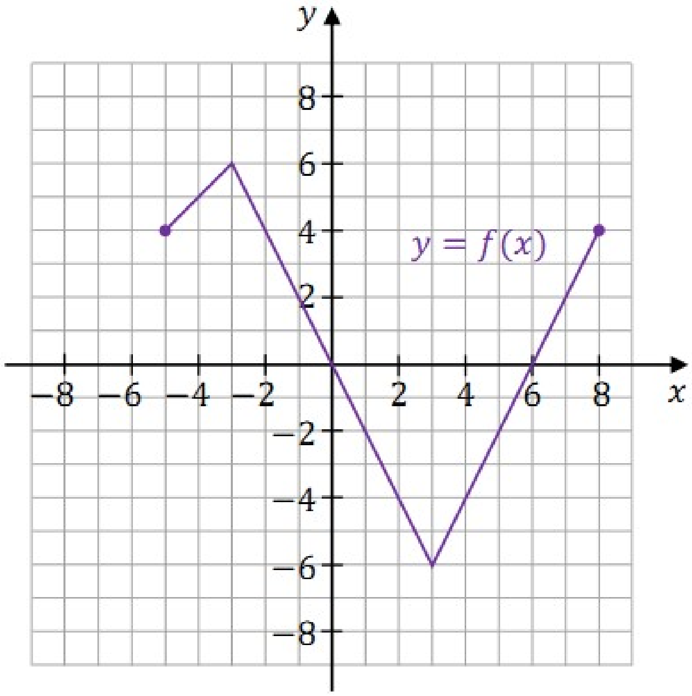
Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Funkcja f

A.	ma dwa rzeczywiste miejsca zerowe,	ponieważ	**1.**	$4 - 12m > 0$
B.	ma jedno rzeczywiste miejsce zerowe,		**2.**	$4 - 12m = 0$
C.	nie ma rzeczywistych miejsc zerowych,		**3.**	$4 - 12m < 0$

Zadanie 27.

Wykres funkcji $y = f(x)$ przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku poniżej.



Zadanie 27.1. (0–1)

Zapisz w miejscu wykropkowanym poniżej zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > 2$.

....

Zadanie 27.2. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Funkcja f jest malejąca w przedziale

A. $[-5, -3]$ **B.** $[3, 8]$ **C.** $[0, 6]$ **D.** $[-3, 3]$

Zadanie 27.3. (0–2)

Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach tak, aby zdania były prawdziwe.

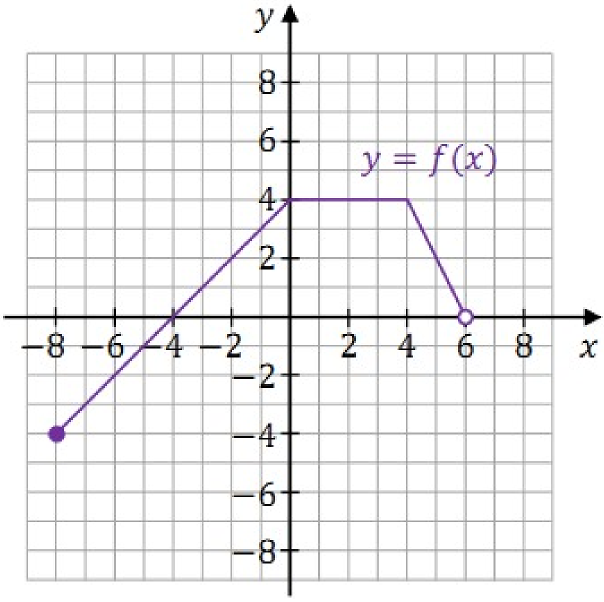
1. Największa wartość funkcji f jest równa ....
2. Najmniejsza wartość funkcji f w przedziale $[6, 8]$ jest równa ....

Zadanie 28. (0–4)

Funkcja f jest określona następująco:

$$f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{dla } x \in [-8, 0] \\ 4 & \text{dla } x \in (0, 4] \\ -2x + 12 & \text{dla } x \in (4, 6) \end{cases}$$

Wykres funkcji $y = f(x)$ przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku poniżej.



Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie przedziały w wykropkowanych miejscach tak, aby zdania były prawdziwe.

1. Dziedziną funkcji f jest przedział …………… .
2. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział …………… .
3. Zbiorem wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości nieujemne, jest przedział …………… .
4. Zbiorem wszystkich rozwiązań równania $f(x) = 4$ jest przedział …………… .

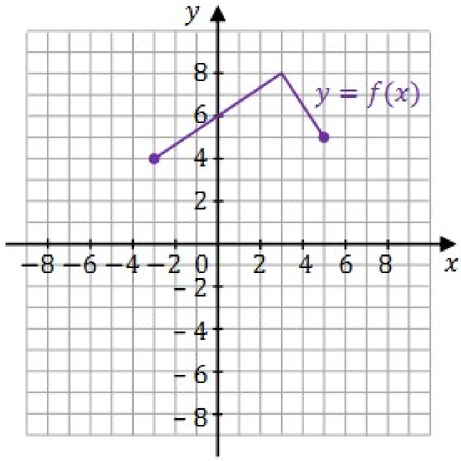
Zadanie 29. (0–2)

Dana jest funkcja $y = f(x)$, której wykres przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku obok.

Funkcje g oraz h są określone za pomocą funkcji f następująco:

$$y = g(x) = f(x+2) \qquad\qquad y = h(x) = f(x) + 2$$

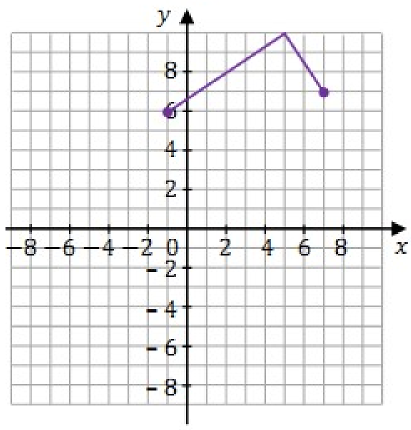
Na rysunkach A–F przedstawiono wykresy różnych funkcji – w tym wykresy funkcji g oraz h.



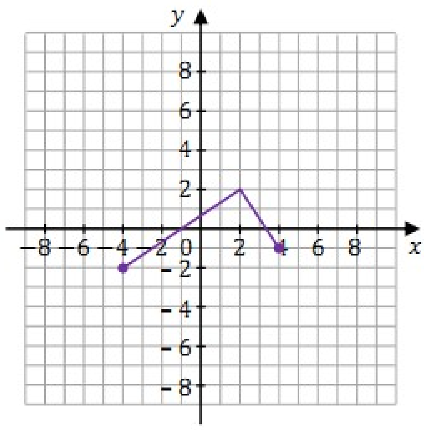
Każdej z funkcji $y = g(x)$ oraz $y = h(x)$ przyporządkuj jej wykres. Wpisz obok symboli funkcji w tabeli poniżej właściwe odpowiedzi wybrane spośród A–F.

Nr zadania	Funkcja	Rysunek
29.1.	$y = g(x)$	
29.2.	$y = h(x)$	

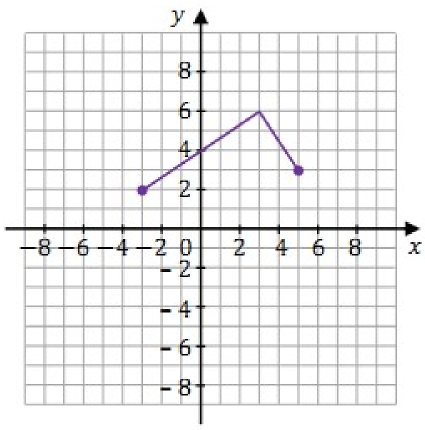
A.



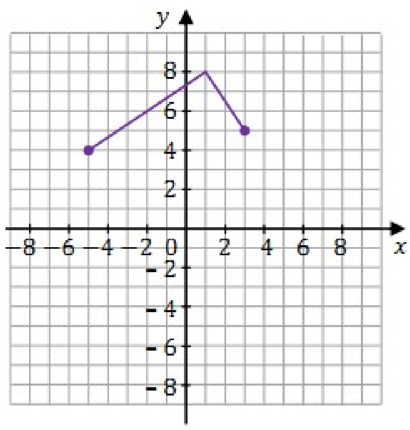
B.



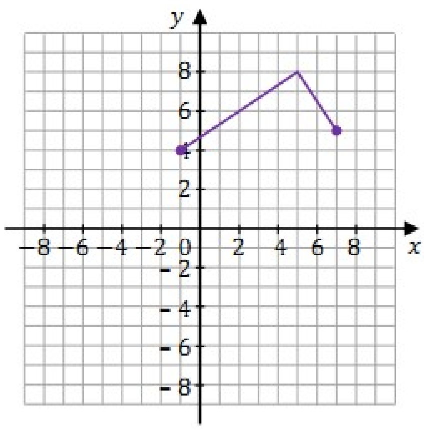
C.



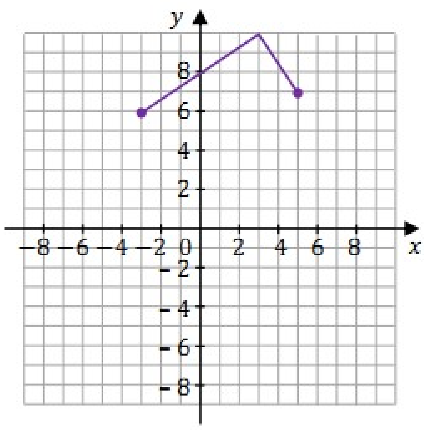
D.



E.

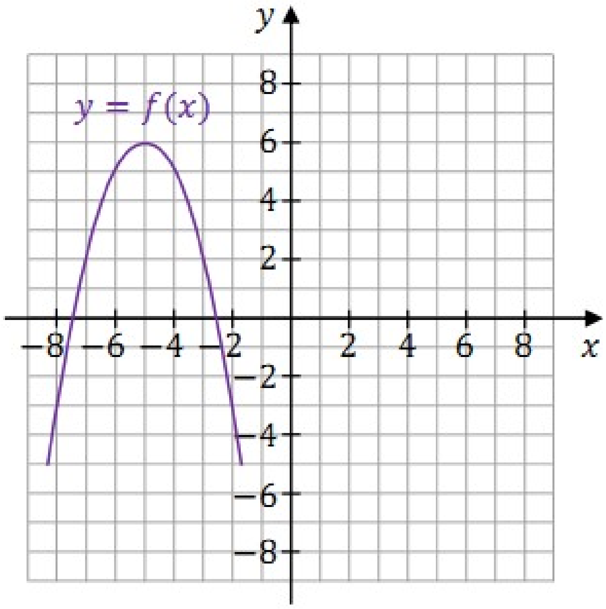


F.



Zadanie 30. (0–1)

Dana jest funkcja kwadratowa $y = f(x)$, której fragment wykresu przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku poniżej.



Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych, jeżeli wiadomo, że jeden ze wzorów podanych w odpowiedziach A–D to wzór funkcji f.

Funkcja kwadratowa $y = f(x)$ jest określona wzorem

A. $y = -(x+5)^2 - 6$

B. $y = -(x+5)^2 + 6$

C. $y = -(x-5)^2 - 6$

Zadanie 31. (0–2)

Do wykresu pewnej funkcji kwadratowej $y = g(x)$ należy punkt o współrzędnych $(2, -6)$. Osią symetrii wykresu tej funkcji jest prosta o równaniu $x = 3$, a jednym z miejsc zerowych funkcji g jest $x_1 = 1$.

Wyznacz wzór funkcji g w postaci iloczynowej.

Zadanie 32.

Na podstawie zasad dynamiki można udowodnić, że torem ruchu rzuconej piłki – przy pominięciu oporów powietrza – jest fragment paraboli.

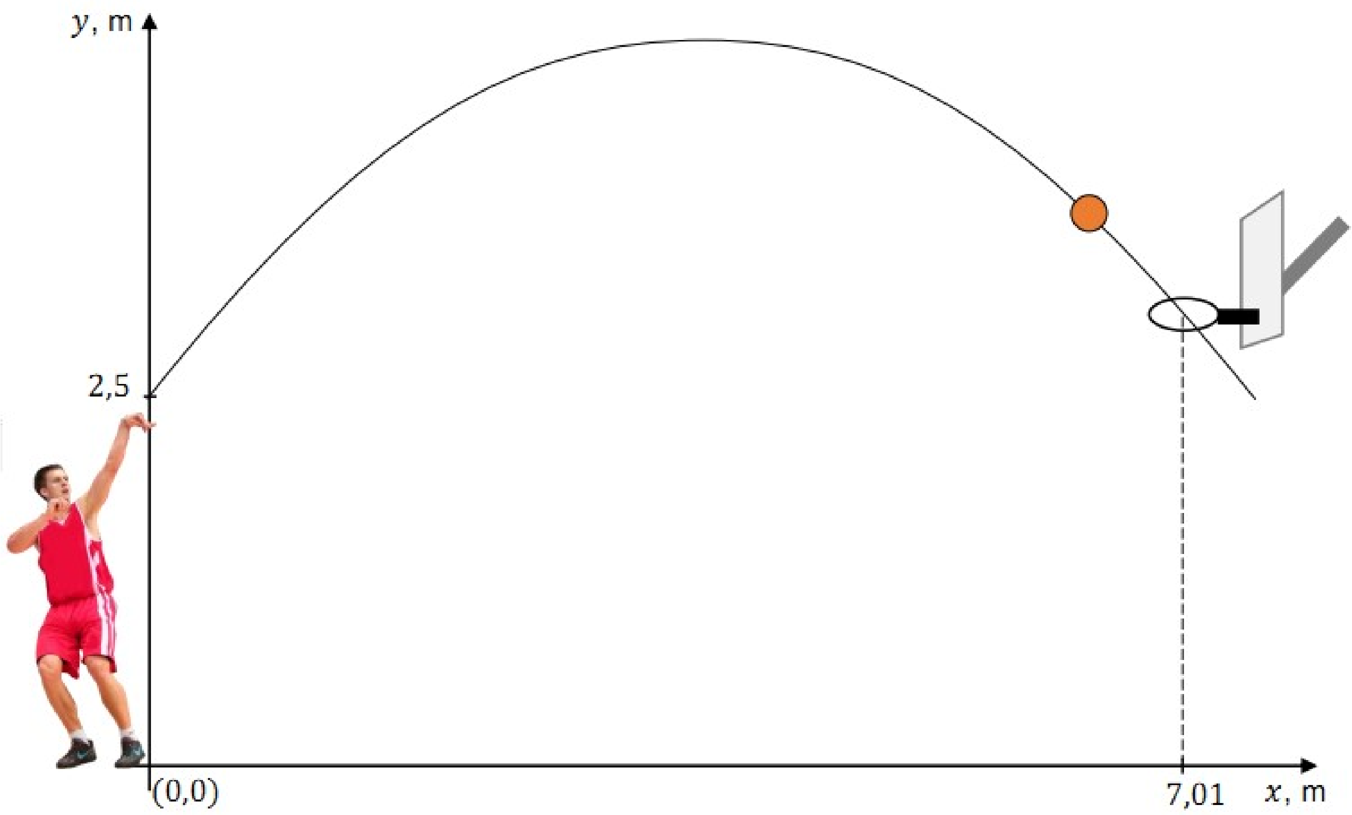
Koszykarz wykonał rzut do kosza z odległości $x_k = 7{,}01$ m, licząc od środka piłki do środka obręczy kosza w linii poziomej.

Do opisu toru ruchu przyjmiemy układ współrzędnych, w którym środek piłki w chwili początkowej znajdował się w punkcie $x_0 = 0$, $y_0 = 2{,}50$ m.

Środek piłki podczas rzutu poruszał się po paraboli danej równaniem:

$$y = -0{,}174x^2 + 1{,}3x + 2{,}5$$

Rzut okazał się udany, a środek piłki przeszedł dokładnie przez środek kołowej obręczy kosza. Na rysunku poniżej przedstawiono tę sytuację oraz tor ruchu piłki w układzie współrzędnych.



Zadanie 32.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Obręcz kosza znajduje się na wysokości (podanej w zaokrągleniu z dokładnością do 0,01 m)

A. 3,04 m **B.** 3,06 m **C.** 3,80 m **D.** 4,93 m

Zadanie 32.2. (0–2)

Oblicz wysokość maksymalną, na jaką wzniesie się środek piłki podczas opisanego rzutu. Wynik zapisz w metrach w zaokrągleniu do drugiego miejsca po przecinku.

Zadanie 32.3. (0–3)

W opisanym rzucie piłka przeleciała swobodnie przez obręcz kosza i upadła na parkiet. Przyjmij, że obręcz kosza nie miała siatki, a na drodze rzutu nie było żadnej przeszkody. Promień piłki jest równy 0,12 m.

Oblicz współrzędną x środka piłki w momencie, w którym piłka dotknęła parkietu. Wynik zapisz w metrach w zaokrągleniu do drugiego miejsca po przecinku.

Zadanie 33.

Czas T połowicznego rozpadu izotopu promieniotwórczego to czas, po którym liczba jąder danego izotopu (a zatem i masa tego izotopu) zmniejsza się o połowę – tzn. połowa jąder danego izotopu przemienia się w inne jądra. Liczba jąder $N(t)$ izotopu promieniotwórczego pozostających w próbce po czasie t, licząc od chwili $t_0 = 0$, wyraża się zależnością wykładniczą:

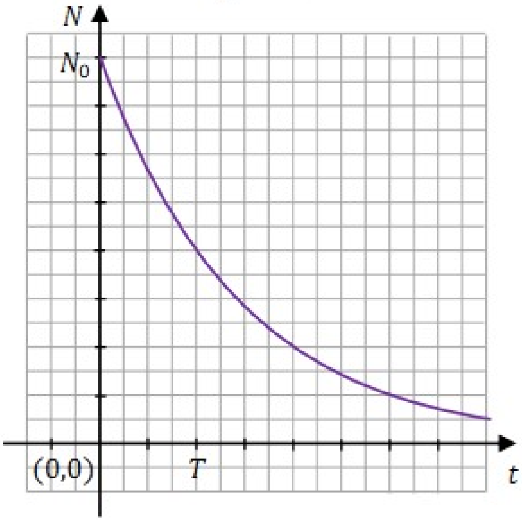
$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

gdzie N_0 jest liczbą jąder izotopu promieniotwórczego w chwili początkowej $t_0 = 0$.

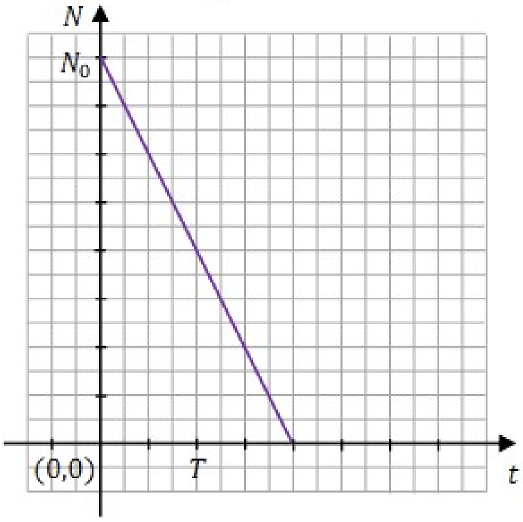
Zadanie 33.1. (0–1)

Na poniższych rysunkach 1.–4. przedstawiono wykresy zależności, z których dokładnie jeden poprawnie ilustruje $N(t)$.

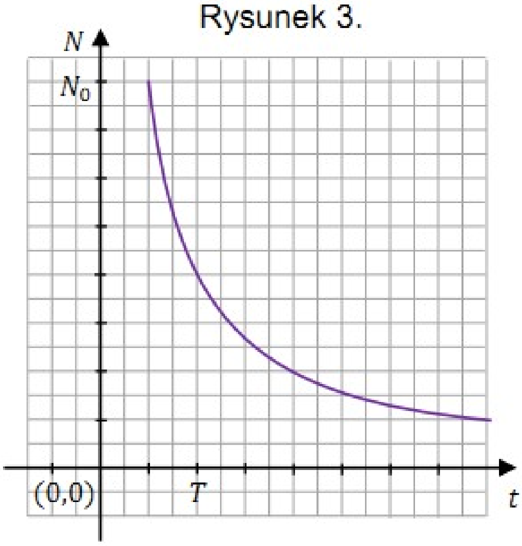
Rysunek 1.



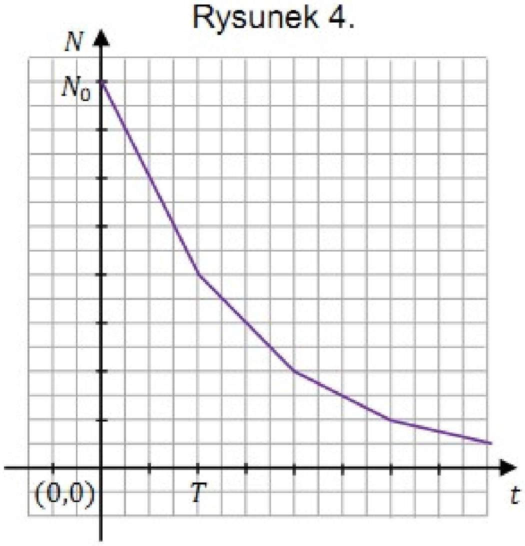
Rysunek 2.



Rysunek 3.



Rysunek 4.



Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wykres zależności wykładniczej $N(t)$ – opisanej we wstępie do zadania – przedstawiono na

A. rysunku 1. **B.** rysunku 2. **C.** rysunku 3. **D.** rysunku 4.

Zadanie 33.2. (0–3)

Czas połowicznego rozpadu węgla ^{14}C to około 5700 lat. Naukowcy oszacowali za pomocą datowania radiowęglowego, że masa izotopu węgla ^{14}C w pewnym organicznym znalezisku archeologicznym stanowi $\frac{1}{16}$ masy tego izotopu, jaka utrzymywała się podczas życia organizmu.

Oblicz, ile lat ma opisane znalezisko archeologiczne. Wynik podaj z dokładnością do stu lat.

Zadanie 34. (0–2)

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = n \cdot a_n + 4 \quad \text{dla każdej liczby naturalnej } n \geq 1 \end{cases}$$

Oblicz sumę czterech początkowych wyrazów ciągu (a_n).

Zadanie 35. (0–2)

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem ogólnym $a_n = 4n - 9$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Wykaż, że ciąg (a_n) jest arytmetyczny.

Zadanie 36. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = n^2 - n$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ jest

A.	rosnący,	ponieważ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$	**1.**	różnica $a_{n+1} - a_n$ jest liczbą ujemną.
B.	malejący,		**2.**	różnica $a_{n+1} - a_n$ jest równa zero.
C.	stały,		**3.**	różnica $a_{n+1} - a_n$ jest liczbą dodatnią.

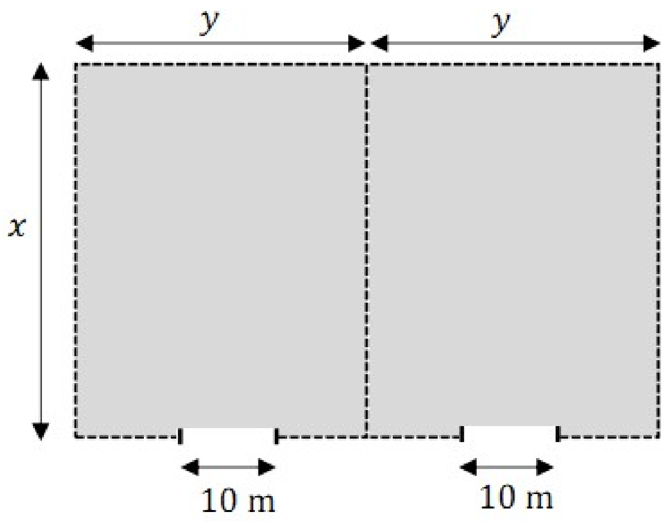
Zadanie 37. (0–2)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{1}{x}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$.

Oblicz wartość m, dla której liczby $f(m)$, $f(1)$, $f(2)$ są – odpowiednio – pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego.

Zadanie 38. (0–4)

Powierzchnia magazynowa będzie się składała z dwóch identycznych prostokątnych działek połączonych wspólnym bokiem. Całość ma być ogrodzona płotem, przy czym obie działki będzie rozdzielał wspólny płot. W ogrodzeniu będą zamontowane dwie bramy wjazdowe, każda o szerokości 10 m (zobacz rysunek poniżej). Łączna długość płotu ogradzającego oraz rozdzielającego obie działki wyniesie 580 metrów, przy czym szerokości obu bram wjazdowych nie wliczają się w długość płotu.



Oblicz wymiary x oraz y każdej z dwóch prostokątnych działek, tak aby całkowite pole powierzchni magazynowej było największe.

TRYGONOMETRIA, PLANIMETRIA, GEOMETRIA ANALITYCZNA, STEREOMETRIA

Zadanie 39. (0–1)

Dany jest kąt o mierze α taki, że $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ oraz $90° < \alpha < 180°$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Dla kąta o mierze α spełnione jest równanie: $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.	**P**	**F**
2.	Dla kąta o mierze α spełnione jest równanie: $|\mathrm{tg}\,\alpha| = \frac{3}{4}$.	**P**	**F**

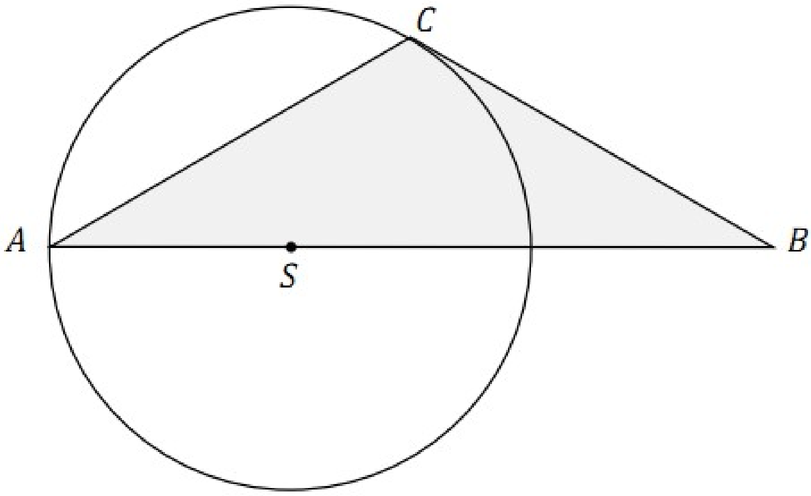
Zadanie 40. (0–2)

W trójkącie ABC dane są długości dwóch boków $|AB| = 12$, $|BC| = 8$ oraz miara kąta $|\sphericalangle ABC| = 60°$.

Oblicz długość środkowej tego trójkąta poprowadzonej z wierzchołka A.

Zadanie 41. (0–4)

Wierzchołki A i C trójkąta ABC leżą na okręgu o promieniu r.
Środek S tego okręgu leży na boku AB tego trójkąta (zobacz rysunek poniżej).
Długości boków AB i AC są równe odpowiednio $|AB| = 3r$ oraz $|AC| = \sqrt{3}r$.



Oblicz miary wszystkich kątów wewnętrznych trójkąta ABC.

Zadanie 42. (0–1)

Punkt S jest środkiem ciężkości trójkąta ABC. Długość odcinka SA jest równa 10.

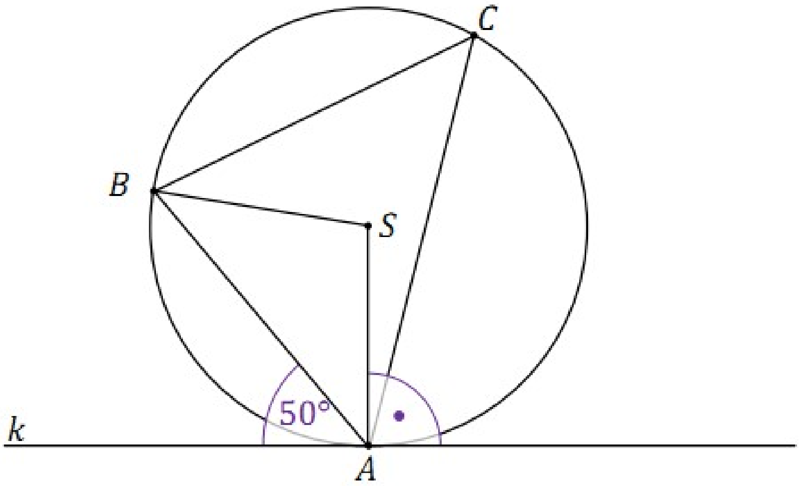
Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość środkowej poprowadzonej z wierzchołka A do boku BC jest równa

A. 10 **B.** 15 **C.** 20 **D.** 30

Zadanie 43. (0–1)

Dane są okrąg o środku S oraz prosta k styczna do okręgu w punkcie A.
Odcinek AB jest cięciwą tego okręgu. Miara kąta ostrego pomiędzy prostą k a cięciwą AB jest równa $50°$. Punkt C leży na okręgu. Kąt wpisany BCA jest ostry.
Sytuację przedstawia rysunek poniżej.



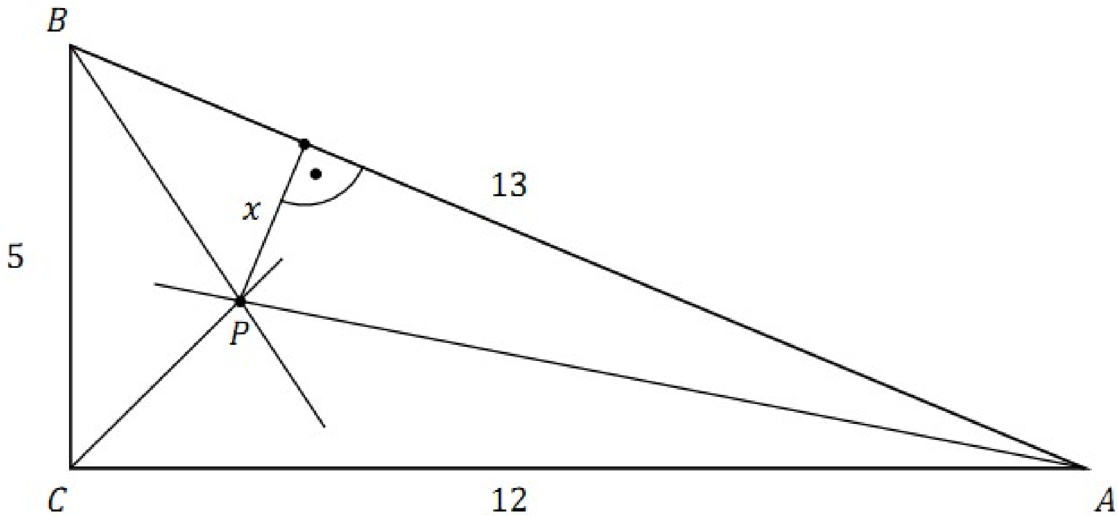
Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta wpisanego BCA jest równa

A. $100°$ **B.** $80°$ **C.** $50°$ **D.** $40°$

Zadanie 44. (0–1)

Dany jest trójkąt prostokątny ABC o bokach $|AC| = 12$, $|BC| = 5$, $|AB| = 13$.
Dwusieczne kątów tego trójkąta przecinają się w punkcie P (zobacz rysunek).



Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

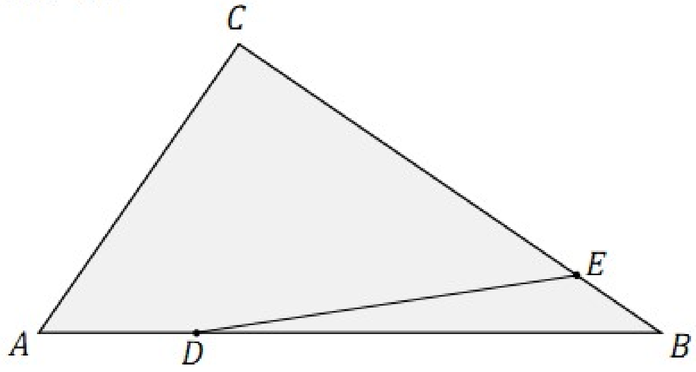
Odległość x punktu P od przeciwprostokątnej AB jest równa

A. 1 **B.** 2 **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** $\frac{20}{13}$

Zadanie 45. (0–3)

Dany jest trójkąt ABC. Na boku AB tego trójkąta wybrano punkt D, taki, że $|AD| = \frac{1}{4}|AB|$, a na boku BC wybrano taki punkt E, że $|BE| = \frac{1}{5}|BC|$ (zobacz rysunek poniżej).

Pole trójkąta ABC jest równe 20.

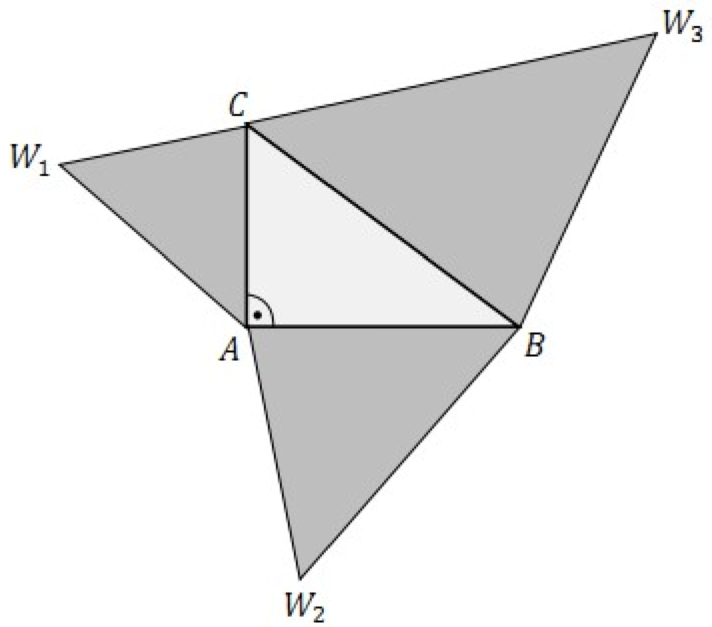


Oblicz pole trójkąta DBE.

Zadanie 46. (0–3)

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa można udowodnić bardziej ogólną własność niż ta, o której mówi samo to twierdzenie.

Rozważmy trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku A. Niech każdy z boków tego trójkąta: CA, AB, BC będzie podstawą trójkątów podobnych, odpowiednio: CAW_1, ABW_2, BCW_3. Trójkąty te mają odpowiadające sobie kąty o równych miarach, odpowiednio przy wierzchołkach: W_1, W_2, W_3.



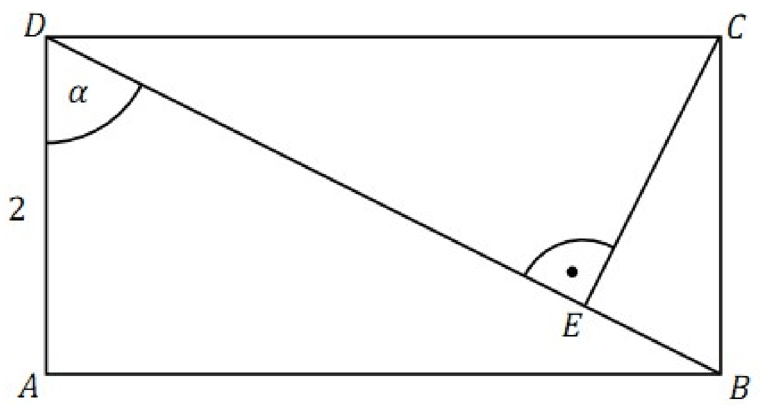
Pola trójkątów: CAW_1, ABW_2, BCW_3 oznaczymy odpowiednio jako P_1, P_2, P_3.

Udowodnij, że

$$P_3 = P_1 + P_2$$

Zadanie 47. (0–3)

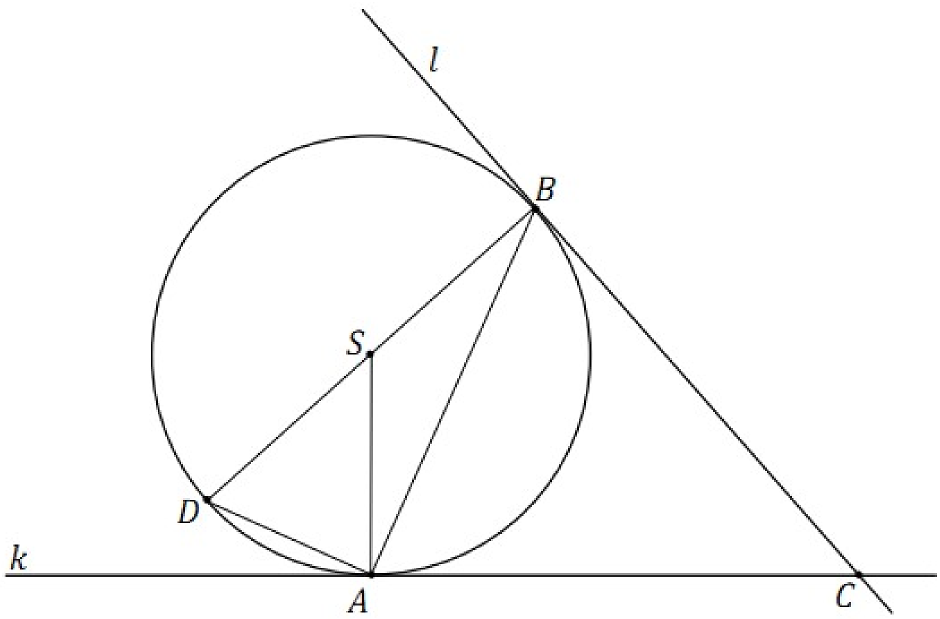
Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AD| = 2$. Kąt BDA ma miarę α, taką, że $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Przekątna BD i prosta przechodząca przez wierzchołek C prostopadła do BD przecinają się w punkcie E (zobacz rysunek).



Oblicz długość odcinka CE.

Zadanie 48. (0–2)

Trzy różne punkty A, B i D leżą na okręgu o środku w punkcie S. Odcinek BD jest średnicą tego okręgu. Styczne k i l do tego okręgu, odpowiednio w punktach A i B, przecinają się w punkcie C (zobacz rysunek poniżej).



Wykaż, że trójkąty ACB i ASD są podobne.

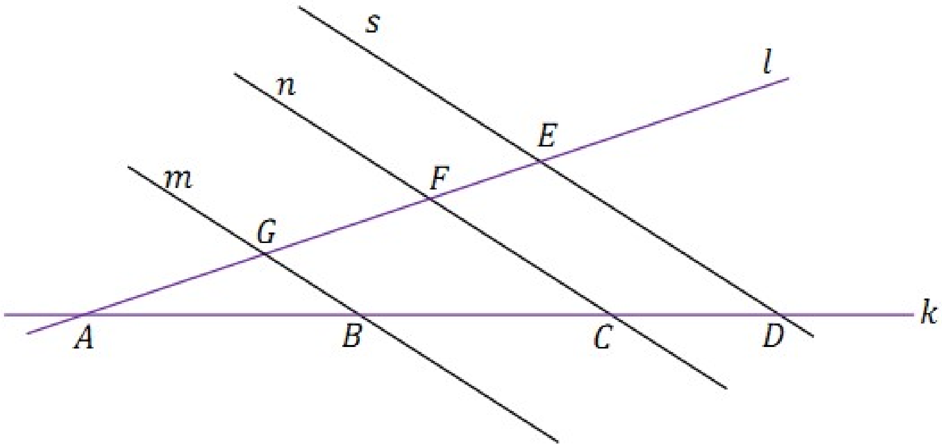
Zadanie 49. (0–3)

Dany jest trójkąt ABC o bokach długości: $|AB| = 4$, $|BC| = 5$, $|AC| = 6$.

Oblicz sinus najmniejszego kąta wewnętrznego trójkąta ABC.

Zadanie 50. (0–1)

Proste k i l przecinają się w punkcie A. Proste m, n i s są wzajemnie równoległe i przecinają obie proste k i l w punktach B, C, D, E, F, G (zobacz rysunek poniżej), w taki sposób, że: $|BC| = 30$, $|CD| = 20$, $|GF| = 21$.



Oblicz długość odcinka FE.

Zadanie 51. (0–1)

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y), dany jest okrąg $\mathcal{O}$ określony równaniem:

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$$

Dokończ zdania. Zaznacz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–G.

1. Środek S okręgu $\mathcal{O}$ ma współrzędne

A. $S = (2, -3)$

B. $S = (-2, -3)$

C. $S = (-2, 3)$

D. $S = (-2, 3)$

2. Promień r okręgu $\mathcal{O}$ jest równy

E. $r = 16$

F. $r = 4$

G. $r = 5$

Zadanie 52. (0–1)

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y), dane są punkty $A = (1, 2)$ oraz $B = (3, 7)$.
Punkty A_O oraz B_O są odpowiednio obrazami punktów A i B w symetrii środkowej o środku w punkcie $O = (0, 0)$.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty A_O i B_O jest równy

A. $\frac{5}{2}$ **B.** $\left(-\frac{5}{2}\right)$ **C.** $\frac{2}{5}$ **D.** $\left(-\frac{2}{5}\right)$

Zadanie 53. (0–1)

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y), dany jest trapez $ABCD$, w którym boki AB i CD są równoległe oraz $C = (3, 15)$. Wierzchołki A i B tego trapezu leżą na prostej o równaniu $3x - y + 10 = 0$.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Bok CD tego trapezu zawiera się w prostej o równaniu

A. $y = 3x + 15$

B. $y = 3x + 6$

C. $y = \frac{5}{3}x + 10$

D. $y = -\frac{1}{3}x + 16$

Zadanie 54. (0–3)

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y), punkty $A = (-1, -5)$, $B = (2, -7)$, $C = (6, 9)$ i $D = (-2, 9)$ są wierzchołkami czworokąta $ABCD$.

Oblicz współrzędne punktu przecięcia przekątnych czworokąta $ABCD$.

Zadanie 55. (0–4)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) przekątne równoległoboku $ABCD$ przecinają się w punkcie $S = \left(\frac{11}{2}, \frac{17}{2}\right)$. Bok AB tego równoległoboku zawiera się w prostej o równaniu $y = x - 2$, a bok AD zawiera się w prostej o równaniu $y = 3x - 6$.

Oblicz współrzędne wierzchołka B.

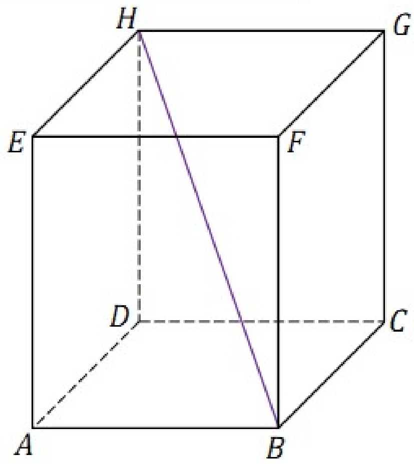
Zadanie 56. (0–4)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkty $A = (2, 8)$ oraz $B = (10, 2)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego ABP, w którym $|AP| = |BP|$.
Wierzchołek P leży na osi Ox układu współrzędnych.

Oblicz współrzędne punktu P <u>oraz</u> długość odcinka AP.

Zadanie 57.

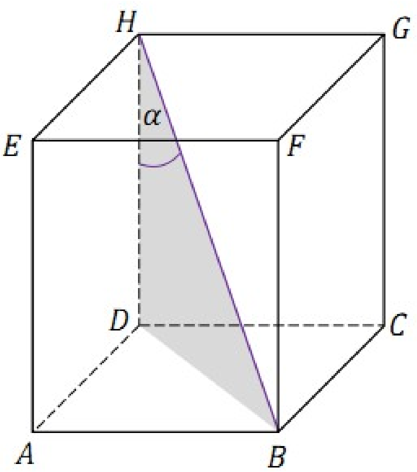
Dany jest prostopadłościan $ABCDEFGH$, w którym prostokąty $ABCD$ i $EFGH$ są jego podstawami. Odcinek BH jest przekątną tego prostopadłościanu.



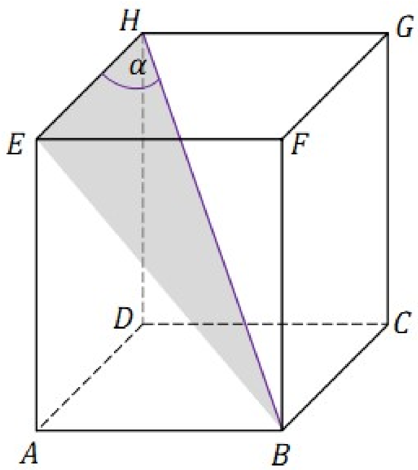
Zadanie 57.1. (0–1)

Na którym rysunku prawidłowo oznaczono i podpisano kąt α pomiędzy przekątną BH prostopadłościanu a jego ścianą boczną $ADHE$? Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

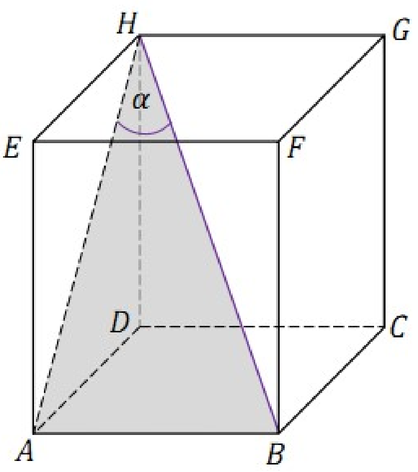
A. $\alpha = \measuredangle BHD$



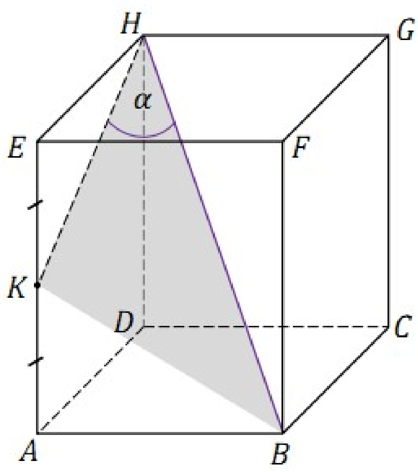
B. $\alpha = \measuredangle BHE$



C. $\alpha = \measuredangle BHA$



D. $\alpha = \measuredangle BHK$, gdzie K jest środkiem krawędzi AE.

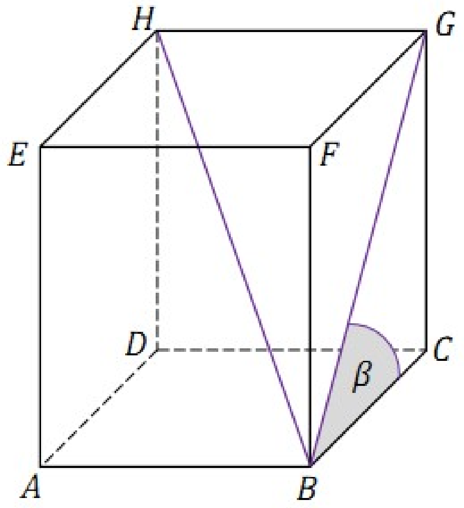


Zadanie 57.2. (0–4)

W prostopadłościanie $ABCDEFGH$ dane są:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{9}{7} \qquad |BG| = 2\sqrt{130} \qquad |BH| = 2\sqrt{194}$$

gdzie odcinek BH jest przekątną prostopadłościanu, odcinek BG jest przekątną ściany bocznej $BCGF$, β jest miarą kąta GBC. Sytuację ilustruje rysunek poniżej.



Oblicz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu $ABCDEFGH$.

Zadanie 58. (0–1)

Dane są dwa prostopadłościany podobne: $\mathcal{B}_1$ oraz $\mathcal{B}_2$. Objętość prostopadłościanu $\mathcal{B}_1$ jest równa V, a objętość prostopadłościanu $\mathcal{B}_2$ jest równa $27V$. Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu $\mathcal{B}_1$ jest równe P.

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu $\mathcal{B}_2$ jest równe

<table>
<tr><td>A.</td><td>$27P$,</td><td rowspan="3">ponieważ stosunek pól powierzchni całkowitych prostopadłościanów podobnych jest równy</td><td>1.</td><td>stosunkowi objętości tych prostopadłościanów.</td></tr>
<tr><td>B.</td><td>$9P$,</td><td>2.</td><td>pierwiastkowi kwadratowemu ze stosunku objętości tych prostopadłościanów.</td></tr>
<tr><td>C.</td><td>$3\sqrt{3}P$,</td><td>3.</td><td>kwadratowi stosunku długości odcinków odpowiadających w obu prostopadłościanach.</td></tr>
</table>

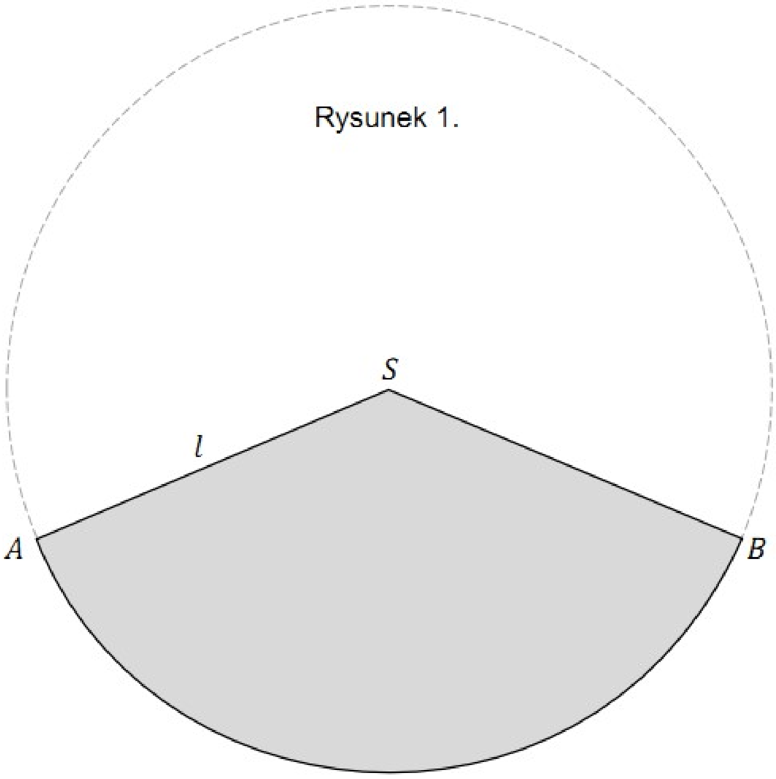
Zadanie 59.

Hania zaprojektowała i wykonała czapeczkę na bal urodzinowy młodszego brata. Czapeczka miała kształt <u>powierzchni bocznej stożka</u> o średnicy podstawy $d = 20$ cm, wysokości $H = 25$ cm i tworzącej l.

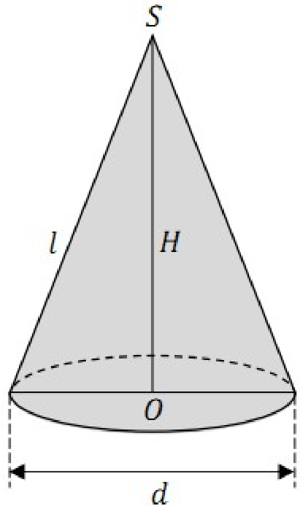
Żeby wykonać czapeczkę, Hania najpierw narysowała na kartonie figurę płaską ABS o kształcie <u>wycinka koła</u> o promieniu l i środku S (zobacz rysunek 1.). Następnie wycięła tę figurę z kartonu, odpowiednio ją wymodelowała i skleiła odcinek SB z odcinkiem SA (zobacz rysunek 2.).

Do obliczeń przyjmij, że rzeczywiste figury są idealne.

Rysunek 1.



Rysunek 2.



Zadanie 59.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Kąt rozwarcia stożka, którego powierzchnią boczną jest czapeczka, ma miarę (w zaokrągleniu do $1°$)

A. $44°$ **B.** $136°$ **C.** $134°$ **D.** $68°$

Wskazówka: skorzystaj z tablic wartości funkcji trygonometrycznych.

Zadanie 59.2. (0–3)

Oblicz miarę kąta BSA wycinka koła, z którego powstała powierzchnia boczna stożka opisanego we wstępie do zadania. Miarę kąta BSA podaj w zaokrągleniu do jednego stopnia.

Zadanie 60. (0–4)

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny. Ściana boczna tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $30°$, a krawędź podstawy ma długość równą $6\sqrt{3}$.

Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

Zadanie 61. (0–1)

Pole powierzchni bocznej walca jest równe 16π, a promień jego podstawy ma długość 2.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

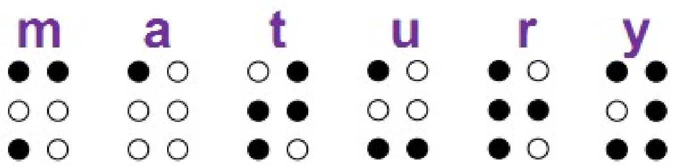
Objętość tego walca jest równa

A. 16 **B.** 32 **C.** 16π **D.** 32π

KOMBINATORYKA, RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA I STATYSTYKA

Zadanie 62. (0–2)

Pojedynczy znak w piśmie Braille'a dla niewidomych jest kombinacją od 1 do 6 wypukłych punktów, które mogą zajmować miejsca ułożone w dwóch kolumnach po trzy miejsca w każdej kolumnie. Poniżej podano przykład napisu w piśmie Braille'a. Czarne kropki w znaku oznaczają wypukłości, a białe kropki oznaczają brak wypukłości. Pojedynczy znak w piśmie Braille'a musi zawierać co najmniej jeden punkt wypukły.

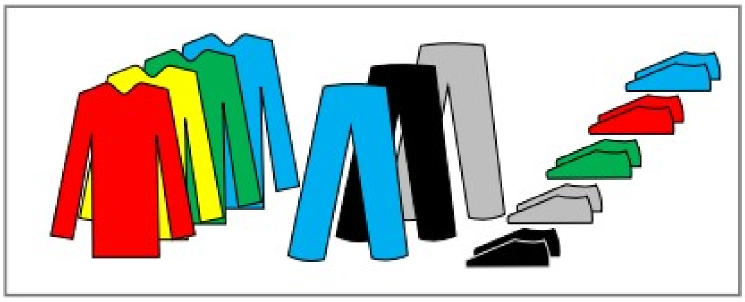


Oblicz, ile różnych pojedynczych znaków można zapisać w piśmie Braille'a.

Zadanie 63.

Andrzej ma w szafie 4 koszule: czerwoną, żółtą, zieloną i niebieską; 3 pary spodni: niebieskie, czarne i szare; oraz 5 par butów: czarne, szare, zielone, czerwone i niebieskie.

Andrzej wybiera z szafy zestaw ubrania: jedną koszulę, jedną parę spodni i jedną parę butów. Zestawy ubrania wybierane przez Andrzeja określimy jako różne, gdy będą różniły się kolorem chociaż jednego rodzaju elementu ubioru w zestawie.



Zadanie 63.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba wszystkich możliwych, różnych zestawów ubrania, jakie może wybrać Andrzej, jest równa

A. 12 **B.** 72 **C.** 60 **D.** 720

Zadanie 63.2. (0–3)

Oblicz, na ile sposobów można wybrać taki zestaw, w którym dokładnie jeden element ubioru będzie niebieski.

Zadanie 64. (0–4)

Spośród wszystkich czterocyfrowych całkowitych liczb dodatnich losujemy jedną liczbę.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowana liczba będzie parzysta, a w jej zapisie dziesiętnym wystąpią dokładnie jedna cyfra 2 i dokładnie jedna cyfra 3.

Zadanie 65.

Na wykresie słupkowym poniżej podano rozkład miesięcznych zarobków wszystkich pracowników w pewnej firmie $\mathcal{F}$. Na osi poziomej podano – wyrażone w tysiącach złotych – miesięczne wynagrodzenie netto pracowników firmy $\mathcal{F}$, a na osi pionowej przedstawiono liczbę osób, która osiąga podane zarobki.

Zadanie 65.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Dominantą miesięcznych zarobków w firmie $\mathcal{F}$ jest

A.	10 tys. zł,	ponieważ	**1.**	tę wartość zarobków osiąga najwięcej osób w firmie $\mathcal{F}$.
B.	4,5 tys. zł,		**2.**	ta wartość zarobków jest największa w firmie $\mathcal{F}$.
C.	4 tys. zł,		**3.**	iloczyn tej wartości zarobków i liczby osób z takimi zarobkami jest największy w firmie $\mathcal{F}$.

Zadanie 65.2. (0–1)

Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiednią liczbę w wykropkowanym miejscu, aby zdanie było prawdziwe.

Medianą miesięcznych zarobków w firmie $\mathcal{F}$ jest .... tys. zł.

Zadanie 65.3. (0–2)

Oblicz średnią miesięcznego wynagrodzenia netto wszystkich pracowników firmy $\mathcal{F}$. Wynik podaj bez zaokrąglania.

Zadanie 65.4. (0–2)

Oblicz, jaki procent liczby wszystkich pracowników firmy $\mathcal{F}$ stanowi liczba osób zarabiających $5,5$ tys. zł lub mniej. Wynik podaj w zaokrąglaniu do 1%.

Zadanie 66. (0–2)

Ze zbioru sześciu liczb $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ losujemy ze zwracaniem kolejno dwa razy po jednej liczbie.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że pierwsza wylosowana liczba będzie większa od drugiej wylosowanej liczby.