

# MATEMATYKA

Przed próbnią maturą w 2025 roku

## Sprawdzian 1.

(poziom rozszerzony)

Czas pracy: **90 minut**

Maksymalna liczba punktów: **30**

Imię i nazwisko

.....

Liczba punktów

Procent

**Zadanie 1. (0–2)**

Reszta z dzielenia liczby całkowitej  $m$  przez 6 jest równa 1, natomiast reszta z dzielenia liczby całkowitej  $n$  przez 6 jest równa 3. Wyznacz resztę z dzielenia liczby  $4m - 5n$  przez 6.

**Zadanie 2. (0–2)**

Liczbę  $\frac{\sqrt{7}+3}{\sqrt{7}-3} - \frac{\sqrt{7}-3}{\sqrt{7}+3}$

zapisz w postaci  $a+b\sqrt{7}$ , gdzie  $a$  i  $b$  są liczbami całkowitymi.

**Zadanie 3. (0–3)**

Funkcja  $f$  jest określona wzorem  $f(x) = \frac{x^2}{3|x|-4}$ .

Wyznacz dziedzinę tej funkcji oraz wykaż, że liczba 1 nie należy do zbioru wartości funkcji  $f$ .

**Zadanie 4.**

Funkcja liniowa  $f$  określona jest wzorem  $f(x) = (2m - 1)x + m$ , gdzie  $m \in \mathbf{R}$ .

**Zadanie 4.1. (0–3)**

Oblicz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których miejsce zerowe funkcji  $f$  jest mniejsze od 2.

**Zadanie 4.2. (0–2)**

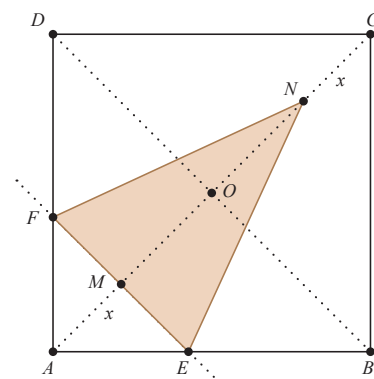
Oblicz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których wykres funkcji  $f$  ma punkt wspólny z odcinkiem  $AB$ , gdzie  $A = (1, 1)$  i  $B = (1, 3)$ .

**Zadanie 4.3. (0–4)**

Oblicz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których wykres funkcji  $f$  ma punkt wspólny z odcinkiem  $AB$ , gdzie  $A = (2, 1)$  i  $B = (4, 2)$ .

**Zadanie 5.**

Dany jest kwadrat  $ABCD$  o boku równym 4. Na przekątnej  $AC$  tego kwadratu wybrano punkty  $M, N$  różne od punktów  $A, C$ , takie że  $|AM| = |CN| = x$  oraz  $|AM| < \frac{1}{2}|AC|$ . Prosta przechodząca przez punkt  $M$  i równoległa do  $BD$  przecina odcinki  $AB$  i  $AD$  w punktach odpowiednio  $E$  i  $F$  (zobacz rysunek).



**Zadanie 5.1. (0–2)**

Wykaż, że pole  $P$  trójkąta  $ENF$ , w zależności od  $x$ , jest określone wzorem

$$P(x) = -2x^2 + 4\sqrt{2}x \text{ dla } x \in (0, 2\sqrt{2}).$$

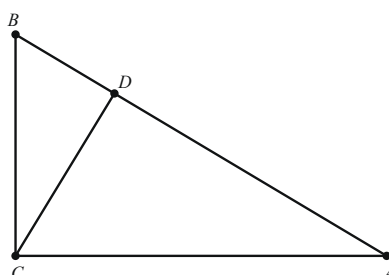
**Zadanie 5.2. (0–3)**

Pole  $P$  trójkąta  $ENF$ , w zależności od  $x$ , jest określone wzorem  $P(x) = -2x^2 + 4\sqrt{2}x$  dla  $x \in (0, 2\sqrt{2})$ .

Wyznacz  $x$ , dla którego pole trójkąta  $ENF$  jest największe. Oblicz to największe pole.

**Zadanie 6.**

Z wierzchołka  $C$  kąta prostego trójkąta prostokątnego  $ABC$  opuszczona jest wysokość  $CD$  (zobacz rysunek).



**Zadanie 6.1. (0–2)**

Punkty  $E$  i  $F$  są środkami przyprostokątnych trójkąta  $ABC$ , odpowiednio  $AC$  oraz  $BC$ .

Wykaż, że trójkąty  $CEF$  i  $DEF$  są przystające.

**Zadanie 6.2. (0–3)**

Wiedząc, że  $|AC| = 12$  i  $|BC| = 5$ , oblicz odległości punktu  $D$  od przyprostokątnych trójkąta  $ABC$ .

**Zadanie 6.3. (0–4)**

Obwód trójkąta  $ADC$  jest równy 12, a obwód trójkąta  $BCD$  wynosi 5. Oblicz obwód trójkąta  $ABC$ .