

Próbnny egzamin maturalny

MATEMATYKA. Poziom rozszerzony

2024/2025

Czas pracy: **180 minut**

Maksymalna liczba punktów: **50**

Zadanie 1. (0-2)

Popularność nowej aplikacji mobilnej, po wprowadzeniu promocji dla nowo zarejestrowanych, rośnie zgodnie z zależnością:

$$N(t) = N_0 \cdot (1 + r)^t$$

gdzie:

N_0 to początkowa liczba użytkowników w momencie wprowadzenia promocji,

r to stała procentowego wzrostu, wyrażona w ułamku dziesiętnym, gdzie $r > 0$,

t to liczba pełnych dni od rozpoczęcia promocji.

System odnotowuje całkowitą liczbę użytkowników na koniec danego dnia. Po dwóch dniach od wprowadzenia promocji dla nowo zarejestrowanych całkowita liczba użytkowników wynosiła 7200, a po 4 dniach - wzrosła do 10 368.

Oblicz, na koniec którego dnia system pierwszy raz zarejestruje przekroczenie czterokrotności początkowej liczby użytkowników, od momentu wprowadzenia promocji. Zapisz obliczenia.

Zadanie 2. (0-2)

Oblicz granicę: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{11^n + 14^n + 17^n}$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 3. (0-2)

Wykaż, że równanie $\log(x) + \sqrt{x-1} + 2x = 9$ ma rozwiązanie, które należy do przedziału $[3, 4]$.

Zadanie 4. (0-3)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \sqrt{5-x^2}$, gdzie $x \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$.

Wyznacz równania stycznych do wykresu funkcji f , które są prostopadłe do prostej o równaniu $y = 2x + 25$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 5. (0-3)

Wykaż, że jeżeli $x, y > 0$, to prawdziwa jest nierówność $(x+y)(x^4+y^4) \geq (x^2+y^2)(x^3+y^3)$.

Zadanie 6. (0-3)

W rombie $ABCD$ o kącie ostrym przy wierzchołku A poprowadzono prostą, która podzieliła ten kąt w stosunku $1 : 3$, zaś bok CD - w stosunku $2 : 3$.

Wykaż, że cosinus kąta ostrego tego rombu jest równy $\frac{1}{8}$.

Zadanie 7. (0-4)

Oblicz sumę wszystkich rozwiązań równania: $\sin^2 x + \sin^2(2x) = \sin^2(3x) + \sin^2(4x)$ w zbiorze $(-\pi, 0)$.

Zadanie 8. (0-4)

Suma trzech początkowych wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) jest równa 215, zaś suma wszystkich wyrazów tego ciągu wynosi 216.

a) Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n) .

b) Znajdź takie dwie liczby x i y , aby ciąg (a_1, x, y, a_4) był ciągiem arytmetycznym.

Zadanie 9. (0-4)

Rozwiąż nierówność, gdzie n jest liczbą naturalną:

$$\binom{2n+1}{2n} + \sqrt{n^2 - 14n + 49} + \frac{\log_{n-1} 16}{\log_{n-1} 8} \leq 13.$$

Podaj konieczne założenia. Zapisz obliczenia.

Zadanie 10. (0-5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $(m-2)x^4 - 2(m+3)x^2 + m-1 = 0$ ma dwa rozwiązania przeciwnych znaków, gdzie $m \in \mathbf{R}$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 11. (0-5)

Sześcian o krawędzi długości a przecięto płaszczyzną, przechodzącą przez przekątną podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem o mierze 60° . Otrzymano pewien przekrój.

Oblicz promień okręgu opisanego na tym przekroju.

Zadanie 12. (0-4)

W kartezjańskim układzie współrzędnych dany jest punkt $A = (1, 4)$, który należy do hiperboli o równaniu $y = \frac{4}{x}$.

Oblicz pole trójkąta wyznaczonego przez styczną do hiperboli w punkcie A i osie układu współrzędnych oraz wyznacz równanie okręgu opisanego na tym trójkącie. Zapisz obliczenia.

Zadanie 13. (0-3)

Biuro podróży oferuje wycieczki objazdowe do różnych regionów świata. Klient ma do wyboru zwiedzanie autokarem lub rejs statkiem. Spośród wszystkich wycieczek, 40 % organizowanych jest do Europy, 35 % do Azji, a 25 % do Ameryki Południowej. W Europie, 60 % to wycieczki autokarowe, a 40 % rejsy statkiem. W Azji do wyboru jest tyle samo wycieczek autokarowych co rejsów, natomiast w Ameryce Południowej 30 % wycieczek odbywa się autokarem, a 70 % statkiem.

Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrana wycieczka jest zorganizowana w Ameryce Południowej, jeśli wiadomo, że jest to rejs statkiem. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

Zadanie 14.

Rozważamy wszystkie trójkąty prostokątne, w których przeciwprostokątna jest o 4 dłuższa od jednej z przyprostokątnych i w których długość każdego z boków nie jest większa od 20.

Zadanie 14.1 (0-2)

Wykaż, że objętość V bryły - otrzymanej w wyniku obrotu trójkąta wokół przeciwprostokątnej - w zależności od długości x danej przyprostokątnej określa się wzorem:

$$V(x) = \frac{8}{3} \pi \frac{x^2(x+2)}{x+4}, x \in (0, 16].$$

Zadanie 14.2 (0-4)

Objętość V bryły - otrzymanej po obrocie trójkąta wokół przeciwprostokątnej - w zależności od długości x danej przyprostokątnej określa się wzorem:

$$V(x) = \frac{8}{3} \pi \frac{x^2(x+2)}{x+4}$$

dla $x \in (0, 16]$.

Oblicz jakie wymiary powinien mieć ten trójkąt, aby objętość otrzymanej bryły była największa. Oblicz tę największą objętość.